Ορισμός: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Το x_0 λέγεται σ.σ. του A αν $\forall\delta>0$ $\exists x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow (A-\{x_0\})\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\neq\emptyset$ $\forall\delta>0$.

Παραδείγματα:

1) $A=[a,b]$ εδώ τα σ.σ. του A είναι ακριβώς τα $x_0\in A$.

2) $A=[a,b)$ εδώ τα σ.σ. του A είναι τα στοιχεία του A και το b.

3) $A=[0,2]\cup\{4\}$ εδώ τα σ.σ. του A είναι τα στοιχεία του συνόλου $[0,2]$. Το $\{4\}\in A$ αλλά δεν είναι σ.σ.

4) Για το σύνολο $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ κανένα $x_0\in\mathbb{R}$ δεν είναι σ.σ. του $\mathbb{N}$.

Πράγματι: a) αν $x_0\in\mathbb{N}$ για $\delta=1$ $(\mathbb{N}-\{x_0\})\cap(x_0-1,x_0+1)=\emptyset$.

b) Αν $x_0\notin\mathbb{N}$

1) $x_0<1$ για $\delta=1-x_0$ κ.τ.λ.

2) $n<x_0<n+1$ για κάποιο n $(n=[x_0])$ για $\delta=\min\{x_0-n,n+1-x_0\}>0$ δεν ισχύει η σχέση του ορισμού.

Ορισμός: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$. Ένα $x_0\in A$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του A αν το x_0 δεν είναι σ.σ. του A, δηλαδή $\exists\delta>0$ $A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x_0\}$.

- Το 4 είναι μεμονωμένο σημείο του $A=[0,2]\cup\{4\}$.
- Κάθε φυσικός αριθμός είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathbb{N}$.

Ορισμός: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ $f:A\to\mathbb{R}$ και x_0 σ.σ. του A και $\ell\in\mathbb{R}$. Λέμε ότι η f τείνει στο ℓ καθώς το x τείνει στο x_0 αν $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ ώστε αν $x\in A$ $0<|x-x_0|<\delta$ τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Συμβολισμός: $f(x)\xrightarrow{x\to x_0}\ell$

Παρατήρηση: Αν η $f(x)$ τείνει στο ℓ_1 καθώς το x τείνει στο x_0 και η $f(x)$ τείνει στο ℓ_2 καθώς το x τείνει στο x_0, τότε $\ell_1=\ell_2$.

Πράγματι, αν $\ell_1\neq\ell_2$ και θέσουμε $\varepsilon=\frac{|\ell_1-\ell_2|}{2}$ εφόσον $f(x)\xrightarrow{x\to x_0}\ell_1$ $\exists\delta_1>0$ ώστε $\forall x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta_1$ να ισχύει $|f(x)-\ell_1|<\varepsilon$ και εφόσον $f(x)\xrightarrow{x\to x_0}\ell_2$ $\exists\delta_2>0$ ώστε $\forall x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta_2$ να ισχύει $|f(x)-\ell_2|<\varepsilon$. Θέτω $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Τότε, εφόσον x_0 σ.σ. του A $\exists x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta\leq\begin{cases}\delta_1\\\delta_2\end{cases}$

$$\left.\begin{aligned}|f(x)-\ell_1|<\varepsilon\\ |f(x)-\ell_2|<\varepsilon\end{aligned}\right\} \Rightarrow |\ell_1-\ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x)-\ell_2| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$$

Επομένως, η f καθώς το x τείνει στο x_0, μπορεί να τείνει σε μοναδικό $\ell \in \mathbb{R}$.

Γράφουμε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 σ.σ. του A.

α) Λέμε ότι η f τείνει στο $+\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 αν $\forall M>0$ $\exists \delta>0$ ώστε $\forall x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta$ $f(x)>M$.

β) Λέμε ότι η f τείνει στο $-\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 αν $\forall M>0$ $\exists \delta>0$ ώστε $\forall x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta$ $f(x)<-M$

Στην περίπτωση α) γράφουμε $\lim\limits_{x\to \ell} f(x) = +\infty$ ενώ στην β) γράφουμε $\lim\limits_{x\to \ell} f(x) = -\infty$.

<u>Παρατήρηση</u>: Τα όρια ορίζονται μόνο σε σημεία συσσώρευσης x_0 του πεδίου ορισμού A της f.

Η f μπορεί να ορίζεται ή να μην ορίζεται στο x_0. Η τιμή $f(x_0)$ δεν επηρεάζει την ύπαρξη ή μη του ορίου της f στο x_0.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in A$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1) Το x_0 είναι σ.σ. του A.

2) $\forall \delta>0$ το σύνολο $A\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$ περιέχει άπειρα το πλήθος σημεία.

3) $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n\neq x_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ με $x_n\to x_0$.

<u>Απόδειξη</u>:

1)→2) Υποθέτουμε ότι $\exists\delta>0$ ώστε το $A\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$ να είναι πεπερασμένο. Τα στοιχεία του παραπάνω συνόλου που είναι διαφορετικά του x_0 σχηματίζουν ένα σύνολο $\{y_1,\dots,y_m\}$. Θέτουμε $\varepsilon=\min\{|y_i-x_0|\ i=1,\dots,m\}$ τότε $\varepsilon>0$

Τότε $\{A\cap(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) - \{x_0\}\} = \emptyset$. Έτσι, το x_0 δεν είναι σ.σ. Άτοπο!

2)→3) Εφαρμόζοντας το 2) για $\delta=\frac{1}{n}$ $n\in\mathbb{N}$, βρίσκουμε $x_0\in A$ με $0<|x-x_0|<\frac{1}{n}$ ώστε $x_n\to x_0$ και $x_n\neq x_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

3)→1) Έστω $\delta>0$. Εφόσον $x_n\to x_0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ $|x_n-x_0|<\delta$ $\forall n\geq n_0$

Ειδικότερα, $x_{n_0}\in A\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$ και $x_{n_0}\neq x_0$.

Παραδείγματα:

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$. Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to5} f(x)=25$.

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητούμε $\delta>0$ ώστε $\forall x\in\mathbb{R}$ με $0<|x-5|<\delta$

Μπορούμε να αναζητούμε $\delta\leq1$. Έτσι όταν $|x-5|<\delta\leq1$ θα ισχύει

$4<x<6 \Rightarrow 9<x+5<11$

$|x^2-25|=|x+5||x-5|<11|x-5|<11\delta$

Ορίζω $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{11},1\}$ και έχω $\forall x\in\mathbb{R}$ $0<|x-5|<\delta$ ισχύει $|x^2-25|<\varepsilon$.

(ii) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq5 \\ 3, & x=5\end{cases}$

Τότε, $\lim\limits_{x\to5} g(x)=25$ (Απόδειξη όμοια με πριν.)

(iii) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$. Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$.

Απόδειξη:

Έστω $M>0$. Αναζητούμε $\delta>0$ ώστε $\forall x\in(0,+\infty)$ με $|x-0|<\delta$

να ισχύει $f(x)>M$.

$\frac{1}{x}>M \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 1>xM \Rightarrow 0<x<\frac{1}{M}$

Θέτουμε $\delta=\frac{1}{M}$. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ με $|x-0|<\delta$.

Τότε $0<x<\delta=\frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x}>M \Rightarrow f(x)>M$. Άρα, $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$.

(iv) $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\frac{1}{x}$.

Το όριο της g στο 0 δεν υπάρχει.

Ορισμός: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$.

α) Το x_0 λέγεται σ.σ. του A από τα δεξιά αν $\forall\delta>0$ $A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\neq\emptyset$.

β) Το x_0 λέγεται σ.σ. του A από τα αριστερά αν $\forall\delta>0$ $A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\neq\emptyset$.

Ορισμός: (Πλευρικά Όρια)

α) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A από τα δεξιά.

α_1. Λέμε ότι η f τείνει στο ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) καθώς το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in A$ αν $x_0 < x < x_0 + \delta$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Συμβολισμός: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

α_2. Ομοίως ορίζονται τα $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

β) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A από τα αριστερά.

β_1. Λέμε ότι η f τείνει στο ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) καθώς το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in A$ αν $x_0 - \delta < x < x_0$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Συμβολισμός: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

β_2. Ομοίως ορίζονται τα $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Παραδείγματα:

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

2) $f(x) = \begin{cases} x+5, & x > 2 \\ 6, & x = 2 \\ 3x-1, & x < 2 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 7$, $\quad \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5$.

Άσκηση για το σπίτι: Να το αποδείξουμε μέσω του ορισμού.

Παρατήρηση: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 σ.σ. του A και από τα αριστερά και από τα δεξιά. Τότε, το όριο της f στο x_0 υπάρχει αν.ν υπάρχουν τα δύο πλευρικά όρια της f στο x_0 και είναι ίσα μεταξύ τους.

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Λέμε ότι το $+\infty$ είναι σ.σ. του A αν $\forall M > 0$ $\exists x \in A$ με $x > M$ ($\Leftrightarrow$ το A δεν είναι φραγμένο άνω $\Leftrightarrow$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to +\infty$)

β) Λέμε ότι το $-\infty$ είναι σ.σ. του A αν $\forall M > 0$ $\exists x \in A$ με $x < -M$ ($\Leftrightarrow$ το A δεν είναι φραγμένο κάτω $\Leftrightarrow$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to -\infty$)

Παρατήρηση: Για το σύνολο $\mathbb{N}$ έχουμε ότι ότι: α) κανένα $x_0 \in \mathbb{R}$ δεν είναι σ.σ. του $\mathbb{N}$.
β) το $+\infty$ είναι σ.σ. του $\mathbb{N}$
γ) το $-\infty$ δεν είναι σ.σ. του $\mathbb{N}$.

Αυτός είναι ο λόγος που στις ακολουθίες (πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$) γράφαμε $\lim a_n$ (αντί για $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$).

Ορισμός:

α) Έστω $f: A\to\mathbb{R}$ ώστε $+\infty$ σ.σ. του A.

$\Rightarrow$ Λέμε ότι η f τείνει στο ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$) καθώς το x τείνει στο $+\infty$ αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists M>0$ ώστε $\forall x\in A$ αν $x>M$ τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Συμβολισμός: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

$\Rightarrow$ Λέμε ότι η f τείνει στο $+\infty$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$ αν $\forall M_1>0$ $\exists M_2>0$ ώστε $\forall x\in A$ αν $x>M_2$ τότε $f(x)>M_1$.

Συμβολισμός: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$\Rightarrow$ Λέμε ότι η f τείνει στο $-\infty$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$ αν $\forall M_1>0$ $\exists M_2>0$ ώστε $\forall x\in A$ αν $x>M_2$ τότε $f(x)<-M_1$.

Συμβολισμός: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

β) Ομοίως ορίζονται τα όρια για $-\infty$ σ.σ. του A.

Θεώρημα: Αρχή Μεταφοράς για Όρια.
(Χαρακτηρισμός ορίων με χρήση ακολουθίας)
Έστω $f: A\to\mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$
(ii) $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο A με $x_n\neq x_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $x_n\to x_0$ τότε $f(x_n)\to\ell$.

Απόδειξη:
Όμοια με την απόδειξη για τον χαρακτηρισμό συνέχειας συναρτήσεων με ακολουθία.

Παρατήρηση:
Αντίστοιχο θεώρημα ισχύει όταν $\ell=+\infty$ ή $\ell=-\infty$, $x_0=+\infty$ ή $x_0=-\infty$ για πλευρικά όρια.

Χρήση του παραπάνω θεωρήματος.

α) Για ν.δ.ο. $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$ (ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$), αρκεί ν.δ.ο. αν (x_n) ακολουθία στο A με $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to \ell$.

β) Για ν.δ.ο. η $f(x)$ δεν τείνει στο ℓ καθώς το x τείνει στο x_0, αρκεί να βρούμε $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \not\to \ell$.

γ) Για ν.δ.ο το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0 δεν υπάρχει, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \neq x_0$ και $y_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ώστε $\begin{cases} x_n \to x_0, & f(x_n) \to \ell_1 \\ y_n \to x_0, & f(y_n) \to \ell_2 \end{cases}$ με $\ell_1 \neq \ell_2$.

Πρόταση: (Άλγεβρα των ορίων)

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A ώστε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m$.

Τότε: α) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + m$

β) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot m$

γ) Αν $g(x) \neq 0$ και $m \neq 0$ $\forall x \in A$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\ell}{m}$.

Απόδειξη:

Εύκολα με χρήση της αρχής μεταφοράς για όρια.

Πρόταση: Έστω $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A.

Αν $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in A$ $x \neq x_0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Απόδειξη:

Αποδεικνύεται εύκολα, άσκηση για το σπίτι.

Εφαρμογή: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Απόδειξη:

Για $0 < x < \pi/2$: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Επίσης, $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$. Άρα, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

Εύκολα, με χρήση της ιδιότητας αυτής, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

Επομένως, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.